Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι

25 Σεπτεμβρίου 2023

Θέμα 1. [0.5+0.5=1]

(α') Δώστε σε αλγεβρική μορφή όλους τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}^*$ για τους οποίους ισχύει $z^i = e^{\pi/2}$.

(β') Έστω $z = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Εκφράστε τους αριθμούς z και z^2 σε πολική μορφή και σχεδιάστε τους.

Θέμα 2. [1+0.5+0.5=2]

(α') Εξετάστε αν για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ ισχύει $n\operatorname{Im} \sqrt[n]{z} \to \operatorname{Arg} z$ για $n \to \infty$.

(β') Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = e^{1/z}$, $z \in \mathbb{C}^*$, είναι ολόμορφη και βρείτε την παράγωγό της.

(γ') Εξετάστε αν υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε η $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $g|_{\mathbb{C}^*} = f$ και $g(0) = a$ να είναι συνεχής.

Θέμα 3. [1+0.5=1.5]

Έστω η $f(z) = z^2\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

(α') Δώστε το διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί στην f και εξετάστε το ως προς τη διαφορισιμότητά του.

(β') Εξετάστε σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 4. [1+1=2]

Έστω $\sigma \in \mathbb{C}$ και οι διωνυμικοί συντελεστές $\binom{\sigma}{0} := 1$, $\binom{\sigma}{n} := \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

(α') Δείξτε ότι $\binom{\sigma}{n+1} = \frac{\sigma-n}{n+1}\binom{\sigma}{n}$ για $\sigma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, και $\binom{\sigma}{n} \neq 0$ για $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(β') Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της διωνυμικής σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n$ για $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ και $\sigma \in \mathbb{N}_0$.

Θέμα 5. [1.5+1+1=3.5]

(α') Αναπτύξτε την $f(z) = \sin^2 z$, $z \in \mathbb{C}$, σε δυναμοσειρά γύρω από το 0, δίνοντας και την ακτίνα σύγκλισής της.

(β') Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\overline{D}(a, r) \subset D$, $r > 0$. Δείξτε ότι η απόλυτη τιμή της f στο κέντρο του κύκλου $\partial D(a, r)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από όλες τις απόλυτες τιμές της f πάνω στο κύκλο.

(γ') Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και $f, g : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφες και έστω ένα $c \in D$ όπου οι παράγωγοι των f και g οσοδήποτε μεγάλης τάξης, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος τους, είναι ίσες. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p του z έτσι ώστε $f = g + p$.

<u>Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.</u> ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!